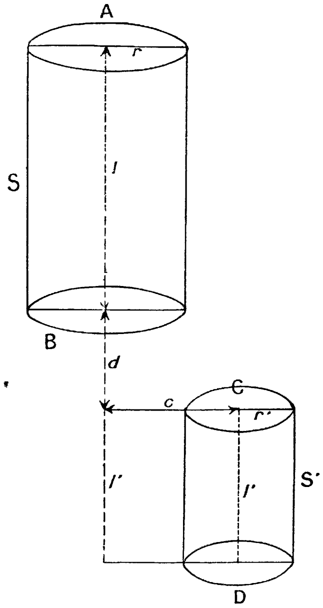
INDUCTION MUTUELLE DE DEUX SOLÉNOÏDES A AXES PARALLÈLES

Par E. MATHY.

Soient les deux solénoïdes S et S′ à axes parallèles : les bases de S sont A et B ; celles de S′, C et D ; les rayons r et r' ; la distance des deux plans parallèles est d ; celle des deux axes est c.

Ces éléments entrent dans les calculs qui se déduisent des formules établies pour l'induction mutuelle de deux circuits circulaires électriques, publiés par le *Journal de Physique* (1). Afin de présenter une théorie complète, les différentes méthodes seront développées avec les indications indispensables.



On désigne par M l'induction cherchée, par $M_{A.C}$ l'intégrale

$$M_{A.C} = \int\int_{A.C} \frac{ds\, ds' \cos\varepsilon}{R},$$

relative aux contours des bases A et C ; avec des notations analogues pour les bases agissantes deux à deux, on a :

$$2M = M_{A.C} - M_{A.D} - (M_{B.C} - M_{B.D}). \quad (1)$$

1re Méthode. — *Usage des tables de Legendre.* — Dans l'expression donnée pour l'induction mutuelle de deux circuits circulaires électriques parallèles (2), les rayons des deux circuits sont égaux ; elle s'étend sans peine au cas de rayons inégaux r et r' ; $c + r$ désignant, dans la figure de démonstration $\overline{ACB'} = \overline{AC} + \overline{CB'} = c + r$; r appartenant à la seconde circonférence, sera remplacé par $c + r'$; de même $c + 2r$ par $c + r + r'$, $2r$ étant la somme des deux rayons.

La formule dans le cas des rayons inégaux sera

$$M_{A.C} = \frac{4\pi r}{c + r'} \sqrt{(l + d)^2 + (c + r + r')^2} \left[\frac{(l + d)^2 + r^2 + (c + r')^2}{(l + d)^2 + (c + r + r')^2} . K - E \right]. \quad (2)$$

$$\text{Le module } k^2{}_{A.C} = \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4r\,(c + r')}{(l + d)^2 + (c + r + r')^2}. \quad (3)$$

On opère de même pour les autres intégrales $M_{A.D}$, $M_{B.C}$ et $M_{B.D}$.

On remarque que, dans les valeurs de k^2, les rayons r, r' des deux solénoïdes, la distance c de leurs axes parallèles restent constants, les distances des bases varient avec leurs positions ; si l'on pose

(1) *Journ. de Phys.*, t. **2** (1921), pp. 227 et 355.

(2) *Journ. de Phys.*, t. **2** (1921), p. 357 (formule 16).

$$H = 4r\,(c + r'); \quad G = (c + r + r'); \quad P = \text{distance des bases}, \tag{4}$$

on aura simplement :

$$k^2{}_{A.C} = \frac{H}{P^2{}_{A.C} + G^2}; \quad k^2{}_{A.D} = \frac{H}{P^2{}_{A.D} + G^2}; \quad k^2{}_{B.C} = \frac{H}{P^2{}_{B.C} + G^2};$$

$$k^2{}_{B.D} = \frac{H}{P^2{}_{B.D} + G^2}. \tag{5}$$

Les tables de Legendre donnent, en connaissant ces modules, les valeurs des périodes corrèspondantes K et E, ce qui fournit la solution cherchée.

2e **Méthode**. — *Développement en séries*. — Pour chaque induction partielle, il faut appliquer la formule relative aux circuits circulaires parallèles parus dans le numéro du *Journal de Physique* déjà cité (formule 17), soit :

$$M_{(\alpha.\beta)} = \frac{\pi^2 k^3{}_{(\alpha.\beta)}}{4}\sqrt{r\,(c + r')}\left(1 + \frac{3}{4}\,k^2{}_{(\alpha.\beta)} + \frac{75}{128}\,k^4{}_{(\alpha.\beta)} + \frac{245}{512}\,k^6{}_{(\alpha.\beta)} + \ldots\right). \tag{6}$$

Les modules respectifs ont les valeurs (5) ; (α, β) représentent les bases opérantes.

3e **Méthode**. — *Usage des signes* ω *et* η. — L'expression à invoquer est [1]

$$M_{(\alpha.\beta)} = \frac{8\pi r}{\sqrt{2\,(c + r')}}\left(\frac{e_{1(\alpha.\beta)}}{2}\,\omega_{(\alpha.\beta)} - \eta_{(\alpha.\beta)}\right). \tag{7}$$

Les trois racines relatives à chaque induction partielle s'écrivent d'après l'observation signalée pour $k^2_{(\alpha.\beta)}$ de la façon suivante :

$$\left.\begin{aligned}
e_{1(\alpha.\beta)} &= \frac{(c + r')^2 + r^2 + P^2{}_{(\alpha.\beta)}}{3\,(c + r')}\\
e_{2(\alpha.\beta)} &= \frac{6r\,(c + r') - [(c + r')^2 + r^2] - P^2{}_{(\alpha.\beta)}}{6\,(c + r')}\\
e_{3(\alpha.\beta)} &= -\,\frac{6r\,(c + r') + (c + r')^2 + r^2 + P^2{}_{(\alpha.\beta)}}{6\,(c + r')}\\
P_{A.C} &= l + d; \quad P_{A.D} = l + d + l'; \quad P_{B.C} = d; \quad P_{BD} = d + l'.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Les demi-périodes ω et η peuvent s'obtenir de deux manières différentes, soit au moyen des relations entre ω et η et les fonctions θ de Jacobi, soit à partir des développements hypergéometriques de ω et η en fonction de l'invariant absolu $\dfrac{J - 1}{J}$.

(1) *Journal de Physique,* déjà cité (une erreur d'impression donne r^2 au numérateur du lieu de r) (formule 18, p. 357).

1er Procédé. — Les indices α β ne seront plus reproduits, les explications précédentes paraissant sans ambiguïté. Dès lors, si $e_2 < 0$, le ω correspondant est

$$\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} = \frac{1 + 2q^4 + 2q^{16}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}. \tag{9}$$

Dans le second membre, les racines e_1, e_2, e_3 sont données par la question; il reste à exprimer q par les éléments rayons et distances.

En remplaçant dans (9), on obtient ω.

En posant

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}, \tag{10}$$

on a

$$q = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \dots \tag{11}$$

Pour trouver η, on se sert de :

$$\eta\omega = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{1 - 3^3.q^2 + 5^3.q^6 - 7^3.q^{12}\dots}{1 - 3.q^2 + 5.q^6 - 7.q^{12}\dots}. \tag{12}$$

Quand

$$\left.\begin{aligned} e_2 &= 0 \\ M &= \frac{4\pi r^{\frac{3}{2}}}{(c + r')^{\frac{1}{2}}}(A - 2B) \\ A &= 1{,}311\ 0\ 28\ 777\ 146\dots \\ B &= 0{,}599\ 0\ 70\ 117\ 367\dots \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Avec $e_2 > 0$, il faut, pour obtenir ω et η, calculer d'abord $\frac{\omega'}{i}$ et $i\eta'$ sachant que e_1, e_2, e_3 se transforment en $-e_3, -e_2, -e_1$; ω en $\frac{\omega'}{i}$; η en $i\eta'$, l en $l' = \frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$ et revenir aux valeurs cherchées par les formules classiques.

2e Procédé. — *Développements hypergéométriques de ω et η.* — Les valeurs expressions de M sont toujours (7) ; les valeurs de ω et η sont :

$$\left.\begin{aligned} g_2^{\frac{1}{4}}\omega &= A\sqrt{2}\,F\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{J-1}{J}\right) \mp \frac{B}{\sqrt{6}}F\left(\frac{7}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{J-1}{J}\right)\sqrt{\frac{J-1}{J}} \\ g_2^{-\frac{1}{4}}\eta &= \frac{B}{\sqrt{2}}F\left(-\frac{1}{12}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{J-1}{J}\right) \pm \frac{A}{6\sqrt{6}}F\left(\frac{5}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{J-1}{J}\right)\sqrt{\frac{J-1}{J}} \\ g_2 &= -4(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Les premières lignes correspondent à $e_2 < 0$, les deuxièmes à $e_2 > 0$; pour $e_2 = 0$ la valeur de M est (13); A et B sont donnés par (13).

Manuscrit reçu le 16 février 1922.