LA REPRÉSENTATION DES ONDES PLANES MONOCHROMATIQUES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE DIRAC

Par GÉRARD PETIAU.
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Sommaire. — On se propose dans ce travail de chercher une expression des solutions ondes planes monochromatiques de l'équation d'ondes relativiste de Dirac, sous la forme d'expressions linéaires en W, p, m_0c, de telle sorte que les amplitudes de la solution générale se représentent par $\mathcal{A}_l = \Sigma_m a_{lm} A_m$ ($l = 1, 2, 3, 4$).

On trouve pour $\mathcal{A}$ deux formes remarquables suivant que l'énergie est positive ou négative

$$\mathcal{A}_{ik} = \left\{ W\delta_{ij}\,\delta_{k2} - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}\,(\rho_1)_{k2} - m_0c^2\,(\rho_3)_{k2}\,\delta_{ij} \right\} C_j$$

$$\mathcal{A}_{ik} = \left\{ W\delta_{ij}\,\delta_{k1} - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}\,(\rho_1)_{k1} - m_0c^2\,(\rho_3)_{k1}\,\delta_{ij} \right\} D_j$$

i, j, k prenant les valeurs 1 et 2, les σ et ρ étant les matrices de Pauli correspondantes.

On montre que quelque soit la détermination des α, la solution de l'équation de Dirac s'exprime par une expression analogue.

Cette solution permet de donner une forme remarquablement simple au calcul de la densité de moyenne d'un opérateur K. Cette méthode est appliquée au calcul des densités des grandeurs correspondant aux seize matrices du système de Dirac.

1. Introduction. — Nous considérons l'équation de Dirac écrite sous la forme

$$d_4\,\delta_{il}\,\psi_l = \left\{ \sum_1^3{}_i\, cd_i\,(\alpha_i)_{il} + \mu c\,(\alpha_4)_{il} \right\} \psi_l \tag{1}$$

d_4, d_i représentant les opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x_i}$, μ étant égal à $-\frac{2\pi i}{h}\,m_0c$.

Les α_i constituent un système de quatre matrices à quatre lignes et quatre colonnes, liées par les relations

$$\alpha_i^2 = 1, \qquad \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0$$
$$(i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Une solution ψ_l représente un système de quatre fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4. S'il existe plusieurs solutions distinctes, nous pourrons représenter celles-ci par un symbole ψ_{lm}, le choix de m fixant un système l. Mais l'équation (1) étant linéaire, nous en obtiendrons la solution générale par une combinaison linéaire de ces solutions ψ_{lm}. Nous écrirons donc celle-ci sous la forme

$$\psi_{lm} = \sum_m \psi_l A_m,$$

les A_m étant des constantes arbitraires.

Si nous itérons le système (1), nous obtiendrons pour une solution déterminée, soit ψ_{km},

$$\begin{aligned} d_4^2\,\psi_{km} = \Bigg\{ & \left(c^2 \sum_1^3{}_i\, d_i^2 + \mu^2c^2 \right) \delta_{kl} \\ & + \sum_{i,j} c^2 d_i d_j (\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)_{kl} \\ & + \mu c^2 \sum_i d_i\,(\alpha_i\alpha_4 + \alpha_4\alpha_i)_{kl} \Bigg\} \psi_{lm} \end{aligned}$$

qui se réduit à

$$d_4^2\,\psi_{km} = \left[\sum_1^3{}_i\, c^2 d_i^2 + \mu^2 c^2 \right] \psi_{km} \tag{2}$$

Une onde plane monochromatique s'écrit sous la forme générale

$$\psi_{km} = a_{km}\, e^{\frac{2\pi i}{h}\left[k_0 Wt - k_1 \vec{p}\,\vec{x}\right]} \tag{3}$$

les a_{km} étant des constantes, et les nombres k_0, k_1 caractérisant la propagation ($k_0^2 = +1$, $k_1^2 = +1$).

Si nous substituons la valeur (3) dans l'équation (2), nous obtenons

$$W^2\,a_{km} = \left\{ \sum_1^3{}_i\, c^2 p_i^2 + m_0^2 c^4 \right\} a_{km}.$$

Cette relation devant avoir lieu pour tous les nombres a_{km}, il en résulte que l'on doit avoir entre les nombres W, p, m_0c la relation

$$W^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \tag{4}$$

Si cette relation est satisfaite, pour une valeur de p donnée, soit p_0, nous aurons deux valeurs de W à considérer, la valeur

$$W_0 = +\sqrt{c^2 p_0^2 + m_0^2 c^4} \quad \text{et la valeur}$$
$$-W_0 = -\sqrt{c^2 p_0^2 + m_0^2 c^4}.$$

Si nous nous donnons la valeur de p_0 et le sens de la propagation, nous écrirons les valeurs de W correspondantes $k_0 W_0$ ou $k_0 W$, k_0 prenant les valeurs ± 1.

2. **Détermination de la solution générale** — Si nous reprenons maintenant l'équation (1) et si nous en cherchons une solution de la forme (3), les constantes a_{lm} devront satisfaire au système

$$\left[k_0 W \delta_{il} + c k_1 \sum_1^3{}_i\, p_i (\alpha_i)_{il} + \mu' (\alpha_4)_{il}\right] a_{lm} = 0 \quad (5)$$

où

$$\mu' = m_0 c^2.$$

En particulier nous pouvons écrire a_{lm} sous la forme générale

$$a_{lm} = \lambda_0 W (\gamma_0)_{lm} + \lambda_1 c \sum_1^3{}_i\, c p_i (\gamma_i)_{lm} + \lambda_2 \mu' (\gamma_4)_{lm}, \quad (6)$$

λ_0, λ_1, λ_2 étant trois constantes et $(\gamma_0)_{lm}$, $(\gamma_1)_{lm}$, $(\gamma_2)_{lm}$, $(\gamma_3)_{lm}$, $(\gamma_4)_{lm}$, cinq matrices à déterminer.

Si nous substituons cette solution dans l'équation (5) précédente, nous obtenons après développement

$$\begin{aligned}
k_0 \lambda_0 W^2 (\gamma_0)_{im} &+ c^2 \lambda_1 k_1 \sum_i p_i^2 (\alpha_i \gamma_i)_{im} + \mu'^2 \lambda_2 (\alpha_4 \gamma_4)_{im} \\
&+ W c \sum_i p_i [k_0 \lambda_1 (\gamma_i)_{im} + \lambda_0 k_i (\alpha_1 \gamma_0)_{im}] \\
&+ W \mu' [k_0 \lambda_2 (\gamma_4)_{im} + \lambda_0 (\alpha_4 \gamma_0)_{im}] \\
&+ \sum_{i,j} c^2 \lambda_1 k_1 p_i p_j (\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i)_{im} \\
&+ c^2 \sum_i p_i \mu' [k_1 \lambda_2 (\alpha_i \gamma_4)_{im} + \lambda_1 (\alpha_4 \gamma_i)_{im}] = 0.
\end{aligned}$$

Pour que cette égalité soit réalisée, compte tenu de la relation (4), il faut que le système de relations suivant soit satisfait

$$\begin{aligned}
k_0 \lambda_0 (\gamma_0)_{im} &= -k_1 \lambda_1 (\alpha_i \gamma_i)_{im} && (a)\\
k_0 \lambda_0 (\gamma_0)_{im} &= -\lambda_2 (\alpha_4 \gamma_4)_{im} && (b)\\
k_0 \lambda_1 (\gamma_i)_{im} + \lambda_0 k_1 (\alpha_i \gamma^0)_{im} &= 0 && (c)\\
k_0 \lambda_2 (\gamma_4)_{im} + \lambda_0 (\alpha_4 \gamma_0)_{im} &= 0 && (d)\\
k_1 \lambda_2 (\alpha_i \gamma_4)_{im} + \gamma_4 (\alpha_4 \gamma_i)_{im} &= 0 && (e)\\
(\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i)_{im} &= 0. && (f)
\end{aligned}$$

Or les relations (*c*) et (*d*) donnent

$$(\gamma_i)_{im} = -\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \frac{k_1}{k_0} (\alpha_i \gamma_0)_{im}$$

$$(\gamma_4)_{im} = -\frac{\lambda_0}{\lambda_2} \frac{1}{k_0} (\alpha_4 \gamma_0)_{im}$$

et l'on peut vérifier facilement que ces valeurs des γ_i et des γ_4 satisfont identiquement les relations (*a*), (*b*), (*e*), (*f*)

Par suite, nous pouvons écrire la solution (6)

$$a_{lm} = \lambda_0 W (\gamma_0)_{lm} - \frac{k_1}{k_0} \lambda_0 \sum_i c p_i (\alpha_i \gamma_0)_{lm} - \frac{\lambda_0}{k_0} \mu' (\alpha_4 \gamma_0)_{lm}$$

Cette solution n'étant déterminée qu'à une constante multiplicative près, nous l'écrirons

$$a_{lm} = k_0 W (\gamma_0)_{lm} - k_1 c \sum_i p_i (\alpha_i \gamma_0)_{lm} - \mu' (\alpha_4 \gamma_0)_{lm}$$

(γ_0) est ici une matrice arbitraire à quatre lignes mais dont le nombre de colonnes est arbitraire. Son intervention ne se manifeste qu'en substituant à une solution a_{lj} un mélange $a_{lj} (\gamma_0)_{jm}$. Il en résulte que l'on ne perd pas en généralité en posant $\gamma_0 = 1$. Nous obtenons alors m ne variant plus que de 1 à 4,

$$a_{lm} = k_0 W \delta_{lm} - k_1 c \sum_1^3{}_i\, p_i (\alpha_i)_{lm} - \mu' (\alpha_4)_{lm}.$$

Nous obtenons ainsi suivant la valeur de l'indice m, quatre solutions particulières de l'équation (5). Si ces solutions particulières sont indépendantes, la solution générale de l'équation (5) s'écrira

$$\mathcal{A}_l = \sum_m a_{lm} A_m$$

Si nous fixons le sens de la propagation en prenant par exemple $k_1 = +1$, nous aurons suivant la valeur $+W_0$ ou $-W_0$ de l'énergie les deux solutions

$$\psi_l^{(\mathrm{I})} = \sum_m \left(W_0 \delta_{lm} - \sum_i c p_i (\alpha_i)_{lm} - \mu' (\alpha_4)_{lm}\right) A_m \, e^{\frac{2\pi i}{h}\left[W_0 t - \vec{p}\,\vec{x}\right]}$$

$$\psi_l^{(\mathrm{II})} = \sum_m \left(W_0 \delta_{lm} + \sum_i c p_i (\alpha_i)_{lm} + \mu' (\alpha_4)_{lm}\right) A_m \, e^{\frac{2\pi i}{h}\left[-W_0 t - \vec{p}\,\vec{x}\right]}$$

Si nous nous bornons à l'onde (I). nous aurons la solution générale $\mathcal{A}_l = \Sigma_m a_{lm} A_m$ dépendant de quatre constantes A_m Ce nombre peut-il être réduit ? Pour cela, il serait nécessaire de montrer que les quatre solutions a_{lm} ne sont pas indépendantes. En particulier, pour que ces constantes se réduisent à deux, il serait nécessaire que les quatre a_{lm} se déduisent de deux d'entre eux.

3. **Détermination de la solution en fonction de deux constantes arbitraires**. — Afin d'examiner si l'on peut ramener les quatre solutions particulières a_{lm} à deux, nous allons considérer les matrices α engendrées suivant le mode particulier qu'a indiqué Dirac.

Nous considérons deux systèmes hypercomplexes anticommutants indépendants,

$$1 = \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \quad 1 = \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$$

tels que

$$\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i = i\sigma_k; \quad \rho_i\rho_j = -\rho_j\rho_i = i\rho_k$$
$$\sigma_i\rho_j = \rho_j\sigma_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

Dans ces conditions, nous pourrons constituer un système de quatre nombres anticommutants en utilisant un des deux modes de génération suivants :

1° Soit en écrivant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, sous la forme $\sigma_i\,\gamma_1$ et α_4 sous la forme $\sigma_0\,\gamma_2$, γ_1 et γ_2 étant deux nombres distincts choisis parmi ρ_1, ρ_2, ρ_3;

2° Soit en écrivant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sous la forme $\eta_1\,\rho_i$ et α_4 sous la forme $\eta_2\rho_0$, η_1, η_2 étant deux nombres distincts choisis parmi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Dans un de ces systèmes déterminé, nous pouvons naturellement sans changer ce système permuter deux $\alpha\mu$ entre eux.

Si nous représentons les σ et les ρ par des matrices à deux lignes et deux colonnes (les σ de Pauli), le mode de génération ci-dessus redonne les matrices α telles que les a données Dirac.

Si nous considérons le premier mode de génération des α, la solution a_{lm} précédente s'écrit avec des indices ne variant plus que sur 1 et 2.

$$a_{ik,lm} = W\delta_{il}\delta_{km} - c\sum_i p_i(\sigma_i)_{il}(\gamma_1)_{km} - \mu'\delta_{il}(\gamma_2)_{km}.$$

La solution générale

$$\mathcal{A}_{i_k} = a_{ik,lm}\,A_{lm}$$

peut se séparer en deux groupes suivant les valeurs 1, 2 de l'indice k, soient

$$\mathcal{A}_{i1} = a_{i1,l1}A_l + a_{i1,l2}B_l$$
$$\mathcal{A}_{i2} = a_{i2,l1}A_l + a_{i2,l2}B_l$$

avec

$$a_{i1,l1} = W - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{il}(\gamma_1)_{11} - \mu'\delta_{il}(\gamma_2)_{11}$$

$$a_{i2,l2} = W - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{il}(\gamma_1)_{22} - \mu'\delta_{il}(\gamma_2)_{22}$$

$$a_{i2,l1} = -\sum_i cp_i(\sigma_i)_{il}(\gamma_1)_{21} - \mu'\delta_{il}(\gamma_2)_{21}$$

$$a_{i1,l2} = -\sum_i cp_i(\sigma_i)_{il}(\gamma_1)_{12} - \mu'\delta_{il}(\gamma_2)_{12}$$

Par hypothèse, ni γ_1, ni γ_2 ne se réduisent à 1 (δ), mais l'on peut avoir, soit γ_1 diagonal, γ_2 ne l'étant pas, soit γ_2 diagonal, γ_1 ne l'étant pas, soit γ_1 et γ_2 tous deux non diagonaux (ces différents cas correspondent avec la représentation de Dirac aux valeurs de γ_1 et γ_2; ρ_3 et ρ_1 ou ρ_2; ρ_1 ou ρ_2 et ρ_3 ; ρ_1 ou ρ_2 et ρ_2 ou ρ_1). Nous aurons ainsi trois cas à examiner. Nous n'étudierons en détail que le cas γ_2 diagonal, nous contentant de montrer que les résultats obtenus restent valables dans les autres cas.

Si γ_2 est diagonal, nous avons $(\gamma_2)_{22} = -(\gamma_2)_{11}$ et, soit $(\gamma_1)_{12} = +(\gamma_1)_{21}$, soit $(\gamma_1)_{12} = -(\gamma_1)_{21}$. Si $(\gamma_1)_{12} = (\gamma_1)_{21}$, cas qui correspond à la représentation usuelle des α : $\gamma_2 = \rho_3$, $\gamma_1 = \rho_1$, nous obtenons

$$\mathcal{A}_{i1} = [W - \mu'(\gamma_2)_{11}]\,\delta_{il}A_l - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{il}(\gamma_1)_{12}B_l$$

$$\mathcal{A}_{i2} = -\sum_i cp_i(\sigma_i)_{il}(\gamma_1)_{12}A_l + [W + \mu'(\gamma_2)_{11}]\,\delta_{il}B_l$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\mathcal{A}_{i1} = a^{(1)}_{il}A_l + a^{(2)}_{il}B_l;\ \mathcal{A}_{i2} = a^{(3)}_{il}A_l + a^{(4)}_{il}B_l$$

avec

$$a^{(1)}_{j}a^{(2)}_{jl} = \left[W^2 - \mu'^2\right]\delta_{il} = \left(a^{(2)}\right)^2_{il} = \left(a^{(3)}\right)^2_{il}$$

$\mathcal{A}_{i1}$ et $\mathcal{A}_{i2}$ devant rester fini lorsque p tend vers zéro, nous tirerons de ces expressions, si $W + \mu'(\gamma_2)_{11}$ ne tend pas vers zéro lorsque p tend vers zéro, ce qui exige que si $(\gamma_2)_{11} = +1$, W prenne la valeur $+W_0 > 0$,

$$\mathcal{A}_{i1} = \frac{-\sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{12}}{W + \mu'(\gamma_2)_{11}}\Big[-\sum_i cp_i(\sigma_i)_{jl}(\gamma_1)_{12}A_l + [W + \mu'(\gamma_2)_{11}]\,\delta_{jl}B_l\Big]$$

$$\left\{\begin{aligned}\mathcal{A}_{i_1} &= \frac{-\sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{12}}{W + \mu'(\gamma_2)_{11}}\,\mathcal{A}_{j2}\\ \mathcal{A}_{i2} &= \frac{W + \mu'(\gamma_2)_{11}}{W + \mu'(\gamma_2)_{11}}\,\delta_{ij}\,\mathcal{A}_{j2}\end{aligned}\right.$$

Si dans ces expressions nous faisons $(\gamma_1)_{12} = (\gamma_2)_{11} = +1$ et si nous posons $\mathcal{A}_{j2} = A_j$ nous retrouvons la représentation des ondes planes monochromatiques solutions de l'équation de Dirac, donnée par M. Louis de Broglie dans son livre « L'électron Magnétique » (p. 163).

$$\mathcal{A}_{i1} = -\frac{\sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}A_j}{W + m_0c^2}\,;\ \mathcal{A}_{i2} = \delta_{ij}A_j.$$

Nous allons mettre la solution précédente sous une forme légèrement différente qui nous sera utile par la suite.

Nous poserons

$$\frac{\mathcal{A}_{j2}}{W + \mu'(\gamma_2)_{11}} = C_j.$$

Nous obtenons alors, en rassemblant à nouveau

$\mathcal{A}_{i1}$ et $\mathcal{A}_{i2}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ik} &= \left\{(W - \mu'(\gamma_2)_{22})\,\delta_{ij}\,\delta_{k2} - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{12}\delta_{k1}\right\}C_j\\ &= \left\{W\delta_{ij}\delta_{k2} - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{k2} - \mu'(\gamma_2)_{k2}\delta_{ij}\right\}C_j\end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{A}_{ik} = \sum a_{ik,j2}\,C_j.$$

La solution générale, sous la réserve que l'énergie ait la valeur $+ W_0 > 0$, s'exprime donc au moyen de deux constantes arbitraires seulement et ceci sous une forme particulièrement simple.

Dans le cas où l'énergie a la valeur $- W_0 < 0$, l'expression précédente n'est plus valable, car $W + \mu'(\gamma_2)_{11}$ tend vers zéro. Mais dans ce cas $W - \mu'(\gamma_2)_{11}$, négatif reste fini quand p tend vers zéro. Nous pouvons donc écrire

$$\mathcal{A}_{i2} = a^{(2)} A_l + \frac{\left[a^{(2)}\right]^2_{il} B_l}{W - \mu'(\gamma_2)_{11}}$$

d'où

$$\mathcal{A}_{i2} = \frac{-\sum\limits_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{12}}{W - \mu'(\gamma_2)_{11}} \Big[(W - \mu'(\gamma_2)_{11})\,\delta_{jl} A_l - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{jl}(\gamma_1)_{12} B_l\Big]$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{i2} = -\dfrac{\sum\limits_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{12}}{W - \mu'(\gamma_2)_{11}}\, \mathcal{A}_{j1} \\ \mathcal{A}_{i2} = \dfrac{W - \mu'(\gamma_2)_{11}}{W - \mu'(\gamma_2)_{11}}\, \delta_{ij}\, \mathcal{A}_{j1} \end{cases}$$

Sur cette forme, en posant $(\gamma_2)_{11} = (\gamma_1)_{12} = + 1$ et $\mathcal{A}_{j1} = B_j$, l'on retrouve les expressions des ondes planes d'énergie négative $- W_0$ données par M. L. de Broglie, soient

$$\mathcal{A}_{i1} = \delta_{ij} B_j, \quad \mathcal{A}_{i2} = \frac{\sum\limits_i cp_i(\sigma_i)_{ij}\, B_j}{W_0 + m_0 c}.$$

De même que précédemment nous pouvons rassembler $\mathcal{A}_{i1}$ et $\mathcal{A}_{i2}$ sous la forme

$$\mathcal{A}_{ik} = \Big[W\delta_{ij}\delta_{k1} - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{21}\,\delta_{k2} - \mu'\delta_{ij}(\gamma_2)_{11}\,\delta_{k1}\Big] D_j$$

en posant

$$D_j = \frac{\mathcal{A}_{j1}}{W - \mu'(\gamma_2)_{11}}.$$

Ce qui s'écrit encore

$$\mathcal{A}_{ik} = \Big[W\delta_{ij}\delta_{k1} - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{k1} - \mu'\delta_{ij}(\gamma_2)_{k1}\Big] D_j$$

ou

$$\mathcal{A}_{ik} = \sum a_{ik,j1}\, D_j$$

solution qui dépend également de deux constantes arbitraires.

4. Cas des autres déterminations des α. — Nous avons montré que la solution générale $\mathcal{A}_{ik}$ s'exprimait sous la forme

$$\sum_j a_{ik,j2}\, C_j \quad \text{ou} \quad \sum_j a_{ik,j1}\, D_j$$

suivant le signe de W, en considérant une représentation bien déterminée de γ_1 et de γ_2 ($\gamma_1 = \rho_1$, $\gamma_2 = \rho_3$). Nous allons maintenant montrer que ces résultats restent valables pour les autres déterminations possibles de γ_1 et de γ_2. Nous ne considérerons que deux autres cas.

a) γ_1 diagonal, γ_2 ne l'étant pas.

L'on a alors

$$(\gamma_1)_{22} = -(\gamma_1)_{11} \quad \text{et soit} \quad (\gamma_2)_{12} = (\gamma_2)_{21}, \quad \text{soit} \quad (\gamma_2)_{12} = -(\gamma_2)_{21}.$$

Nous nous plaçons dans l'alternative :

$$(\gamma_1)_{22} = -(\gamma_1)_{11}, \quad (\gamma_2)_{12} = -(\gamma_2)_{12} \quad (\gamma_1 = \rho_3,\ \gamma_2 = \rho_2$$

Nous avons alors

$$\mathcal{A}_{i1} = \Big[W\delta_{il} - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{il}(\gamma_1)_{11}\Big] A_l - \mu'\delta_{il}(\gamma_2)_{12} B_l$$

$$\mathcal{A}_{i2} = \mu'\delta_{il}(\gamma_2)_{12} A_l + \Big[W\delta_{il} + \sum_i cp_i(\sigma_i)_{il}(\gamma_1)_{11}\Big] B_l$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathcal{A}_{i1} = -\frac{(\gamma_2)_{12}}{\mu'}\Big[W\delta_{ij} - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{11}\Big] a_{j2}$$

$$\mathcal{A}_{i2} = -\frac{(\gamma_2)_{12}}{\mu'} (\gamma_2)_{12}\, \mu'\delta_{ij}\, \mathcal{A}_{j2}.$$

Posant

$$-\frac{(\gamma_2)_{12}}{\mu'} \mathcal{A}_{j2} = C_j, \text{ l'on obtient}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_i = \Big[W\delta_{ij} - \sum\limits_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{11}\Big] C_j \\ \mathcal{A}_{i2} = (\gamma_2)_{12}\, \mu'\delta_{ij}\, C_j \end{cases}$$

et en rassemblant $\mathcal{A}_{i1}$ et $\mathcal{A}_{i2}$

$$\mathcal{A}_{ik} = \Big[W\delta_{ij}\delta_{k1} - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{k1} - \mu'(\gamma_2)_{k1}\delta_{ij}\Big] C_j$$

ou

$$\mathcal{A}_{ik} = \sum_j a_{ik,j1}\, C_j$$

Nous aurions de même une seconde solution.

$$\mathcal{A}_{ik} = \sum_j a_{ik,j2}\, D_j.$$

b) Ni γ_1, ni γ_2 ne sont diagonaux.

Nous avons alors :

α) Soit $(\gamma_1)_{12} = (\gamma_1)_{21}$ avec $(\gamma_2)_{12} = -(\gamma_2)_{21}$

β) Soit $(\gamma_1)_{12} = -(\gamma_1)_{21}$ avec $(\gamma_2)_{12} = (\gamma_2)_{21}$.

Nous n'examinerons que le cas (α), la discussion dans le cas (β) étant analogue.

Nous avons :

$$\mathcal{A}_{i1} = W\delta_{il} A_l + \Big[\sum_i cp_i(\sigma_i)_{il}(\gamma_1)_{12} - \mu'\delta_{il}(\gamma_2)_{12}\Big] B_l$$

$$\mathcal{A}_{i2} = \Big[-\sum_i cp_i(\sigma_i)_{il}(\gamma_1)_{12} + \mu'\delta_{il}(\gamma_2)_{12}\Big] A_l + W\delta_{il} B_l$$

ce qui se met facilement sous la forme

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{A}_{i1} &= \frac{1}{W}\left[-\sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{12} - \mu'\delta_{ij}(\gamma_2)_{12}\right]\mathfrak{A}_{j2}\\ \mathfrak{A}_{i2} &= \frac{1}{W}W\delta_{ij}\,\mathfrak{A}_{j2}\end{aligned}\right.$$

Posant encore

$$C_j = \frac{1}{W}\mathfrak{A}_{j2}$$

et en rassemblant $\mathfrak{A}_{i1}$ et $\mathfrak{A}_{i2}$, nous obtenons

$$\mathfrak{A}_{ik} = \left[W\delta_{ij}\delta_{k2} - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\gamma_1)_{k2} - \mu'\delta_{ij}(\gamma_2)_{k2}\right]C_j$$

ou $$\mathfrak{A}_{ik} = \sum_j a_{ik,j2}\,C_j.$$

Les cas examinés appartiennent tous au premier mode de construction des α que nous avons indiqué :

$$\alpha_i = \sigma_i\gamma_1, \quad \alpha_4 = \sigma_0\gamma_2.$$

Le second mode de construction

$$\alpha_i = \eta_1\rho_i, \quad \alpha_4 = \eta_2\rho_0,$$

conduit à des résultats identiques.

En effet, la solution

$$a_{ik,lm} = W\delta_{il}\delta_{km} - \sum_i cp_i(\eta_1)_{il}(\rho_i)_{km} - \mu'(\eta_2)_{il}\delta_{km}$$

se sépare encore en deux groupes :

$$a_{ik,1m} = W\delta_{i1}\delta_{km} - \sum_i cp_i(\eta_1)_{i1}(\rho_i)_{km} - \mu'(\eta_2)_{i1}\delta_{km}$$

$$a_{ik,2m} = W\delta_{i2}\delta_{km} - \sum_i cp_i(\eta_1)_{i2}(\rho_i)_{km} - \mu'(\eta_2)_{i2}\delta_{km}$$

et les cas étudiés précédemment se retrouvent en donnant à i les valeurs 1 et 2.

La représentation obtenue pour l'onde plane monochromatique est donc générale et s'écrit dans une représentation quelconque des α au moyen d'indices variant sur 1 et 2.

$$\mathfrak{A}_{ik} = \sum_j\left(W\delta_{ij}\delta_{k2} - \sum_i^3{}_1\, cp_i(\alpha_i)_{ik,j2} - \mu'(\alpha_4)_{ik,j2}\right)C_j$$

lorsque $W > 0$ et

$$\mathfrak{A}_{ik} = \sum_j\left(W\delta_{ij}\delta_{k1} - \sum_i^3{}_1\, cp_i(\alpha_i)_{ik,j1} - \mu'(\alpha_4)_{ik,j1}\right)D_j$$

orsque $W < 0$.

Nous allons utiliser cette forme $\mathfrak{A}_{ik}$ pour retrouver dans le cas de la détermination usuelle des α, les expressions connues des densités de valeur moyenne des grandeurs attachées à l'électron de Dirac.

5. Calcul des densités de valeur moyenne. Formule générale. — L'étude précédente nous a montré que la solution de l'équation de Dirac en l'absence de champs est représentée dans le cas d'une onde plane monochromatique correspondant à une énergie $W = W_0 > 0$, et à une impulsion p par le système d'ondes

$$\psi_{ik}^+ = \mathfrak{A}_{ik}^+\, e^{\frac{2\pi i}{h}\left[Wt - \vec{p}\,\vec{x}\right]} = \sum_j a_{ik,j2}\,C_j\, e^{\frac{2\pi i}{h}\left[Wt - \vec{p}\,\vec{x}\right]}$$

tandis que lorsque W prend la valeur $W = -W_0$ cette solution s'écrit :

$$\psi_{ik}^- = \mathfrak{A}_{ik}^-\, e^{\frac{2\pi i}{h}\left[Wt - \vec{p}\,\vec{x}\right]} = \sum_j a_{ik,j1}\,D_j\, e^{\frac{2\pi i}{h}\left[Wt - \vec{p}\,\vec{x}\right]}$$

Dans le cas de la détermination usuelle des α $a_{ik,j2}$ et $a_{ik,j1}$ s'écrivent

$$a_{ik,j2} = W\delta_{ij}\delta_{k2} - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\rho_1)_{k2} - \mu'\delta_{ij}(\rho_3)_{k2}$$

$$a_{ik,j1} = W\delta_{ij}\delta_{k1} - \sum_i cp_i(\sigma_i)_{ij}(\rho_1)_{k1} - \mu'\delta_{ij}(\rho_3)_{k1}$$

σ_1, σ_2, σ_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3 représentant le système des matrices :

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} & 1\\ 1 & \end{vmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} & i\\ -i & \end{vmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & \\ & -1\end{vmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{vmatrix} & 1\\ 1 & \end{vmatrix} \quad \rho_2 = \begin{vmatrix} & i\\ -i & \end{vmatrix} \quad \rho_3 = \begin{vmatrix} 1 & \\ & -1\end{vmatrix}$$

Si nous considérons une grandeur K, réprésentée par un opérateur K_{il} (i, l variant de 1 à 4), la densité de valeur moyenne correspondant s'écrit

$$\overline{K} = \sum_{i,l\,1}^{4} \psi_i^*\, K_{il}\,\psi_l$$

et si nous introduisons des indices ne variant que sur 1 et 2.

$$\overline{K} = \psi_{il}^*\,(K)_{il,km}\,\psi_{km}.$$

Si nous supposons $W > 0$ et si nous introduisons la valeur de ψ

$$\psi_{km} = \sum_s a_{km,s2}\,C_s\, e^{\frac{2\pi i}{h}\left[Wt - \vec{p}.\vec{x}\right]}$$

nous obtenons

$$\overline{K} = \sum_{r,s} C_r^*\, a_{il,r2}^*\,(K)_{il,km}\,a_{km,s2}\,C_s.$$

Or, l'expression donnée pour $a_{il,r2}$ est réelle (hermitique). Nous avons donc

$$a_{il,r2}^* = a_{r2,il}$$

d'où

$$\overline{K} = \sum_{rs} C_r^*\, a_{r2,il}\,(K)_{il,km}\,a_{km,s2}\,C_s$$

$$\overline{K} = \sum_{rs} C_r^*\,(aKa)_{r2,s2}\,C_s.$$

Le calcul de $\overline{K}$ est donc ramené au calcul de l'élément $r2, s2$ de la matrice aKa.

Nous allons donner pour cette matrice une forme plus simple.

Nous pouvons en effet écrire $a = W + H$ avec

$$H = -\left(\sum_i cp_i\alpha_i + \mu'\alpha_4\right)$$

H étant tel que

$$H^2 = \sum_i c^2 p_i^2 + \mu'^2 = W^2.$$

Or, par rapport à l'opérateur K, H peut se décomposer en deux parties, l'une H_1 commutant avec K, l'autre H_2, anticommutant avec K.

$$H = H_1 + H_2, \quad H_1 K = KH_1, \quad H_2 K = -KH_2.$$

Dans ces conditions nous obtenons :

$$aKa = a\left[2(W + H_1) - a\right] K.$$

Or $\quad a^2 = W^2 + H^2 + 2WH = 2W(W + H) = 2Wa$

ce qui nous permet d'écrire

$$aKa = 2aH_1K.$$

Nous obtenons donc ainsi pour la densité $\overline{K}$ la formule remarquable

$$\overline{K} = 2\sum_{r,s} C_r^* (aH_1K)_{r2,s2}\, C_s.$$

6. **Application au calcul des densités des grandeurs correspondant aux 16 matrices du système des** α. — Pour calculer au moyen de la dernière formule les densités de valeurs moyennes correspondant aux seize grandeurs dont les opérateurs sont les matrices du système des α il nous sera nécessaire d'avoir les expressions de ces matrices en fonction des σ et des ρ. Nous avons facilement dans le cas de la représentation utilisée dans le livre de M. L. de Broglie.

$$1 = \sigma_0\rho_0; \quad \alpha_1 = \sigma_1\rho_1; \quad \alpha_2 = \sigma_2\rho_1; \quad \alpha_3 = \sigma_3\rho_1; \quad \alpha_4 = \sigma_0\rho_3$$

$$i\alpha_1\alpha_2 = \rho_0\sigma_3; \quad i\alpha_2\alpha_3 = \rho_0\sigma_1; \quad i\alpha_3\alpha_1 = \rho_0\sigma_2; \quad i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \rho_1\sigma_0$$

$$i\alpha_1\alpha_4 = -\rho_2\sigma_1; \quad i\alpha_2\alpha_4 = -\rho_2\sigma_2; \quad i\alpha_3\alpha_4 = -\rho_2\sigma_3$$

$$i\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \rho_3\sigma_1; \quad i\alpha_3\alpha_1\alpha_4 = \rho_3\sigma_2; \quad i\alpha_1\alpha_2\alpha_4 = \rho_3\sigma_3$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \rho_2\sigma_0.$$

En appliquant la formule

$$\overline{K} = 2\sum_{r,s} C_r^* (aH_1K)_{r2,s2}\, C_s$$

nous obtenons les densités suivantes.

1° $\quad K = 1 \quad H_1 = H = a - W$

$$\overline{K}(1) = \rho = 2W\sum_{rs} C_r^* a_{r2,s2}\, C_s$$

ou

$$\rho = 2W\left[W + \mu'\right]\left(\sum_{r,s} C_r^* \delta_{rs}\, C_s\right).$$

2° $\quad K = \alpha_i \quad H_1 = -cp_i\alpha_i \quad H_1K = -cp_i$

$$\overline{K}(\alpha_i) = j_i = -2cp_i\left(\sum_{r\,s} C_r^* a_{r2,s2}\, C_s\right)$$

$$= -2cp_i\left[W + \mu'\right]\left(\sum_{r,s} C_r^* \delta_{rs}\, C_s\right)$$

et en introduisant ρ, on retrouve la formule connue

$$j_i = -\frac{cp_i}{W}\rho.$$

3° $\quad K = \alpha_4 \quad H_1 = -\mu'\alpha_4 = -m_0c^2\alpha_4$

$$H_1K = -m_0c^2$$

$$\overline{K}(\alpha_4) = \Omega_1 = -2m_0c^2\left(\sum_{r,s} C_r^* a_{r2,s2}\, C_s\right)$$

$$= -2m_0c^2\left[W + \mu'\right]\left(\sum_{r,s} C_r^* \delta_{rs}\, C_s\right) = -m_0c^2\frac{\rho}{W}.$$

4° $\quad K = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$

K anticommute avec tous les α, d'où $H_1 = 0$

$$\overline{K}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = \Omega_2 = 0.$$

5° $\quad K = i\alpha_2\alpha_3 \quad H_1 = -cp_1\alpha_1 - \mu'\alpha_4$

$$aH_1K = -cp_1\left[W\rho_1\sigma_0 - cp_1\rho_0\sigma_1 - cp_2\rho_0\sigma_2 - cp_3\rho_0\sigma_3 + \mu' i\rho_2\sigma_0\right]$$
$$-\mu'\left[W\rho_3\sigma_1 - cp_1 i\rho_2\sigma_0 + cp_2 i\rho_2\sigma_3 - cp_3 i\rho_2\sigma_2 - \mu'\rho_0\sigma_1\right]$$

ce qui donne en prenant les éléments $r2$, $s2$

$$\overline{K}(i\alpha_2\alpha_3) = 2cp_1\left[\sum_{rs} C_r^*(cp_1(\sigma_1)_{rs} + cp_2(\sigma_2)_{rs} + cp_3(\sigma_3)_{rs})\, C_s\right]$$
$$+ 2\mu'\left[W + \mu'\right]\left(\sum_{r,s} C_r^*(\sigma_1)_{rs}\, C_s\right).$$

Nous obtenons de même

$$\overline{K}(i\alpha_3\alpha_1) = 2cp_2\left[\sum_{r,s} C_r^*(cp_1(\sigma_1)_{rs} + cp_2(\sigma_2)_{rs} + cp_3(\sigma_3)_{rs})\, C_s\right]$$
$$+ 2\mu'\left[W + \mu'\right]\left(\sum_{r,s} C_r^*(\sigma_2)_{rs}\, C_s\right)$$

$$\overline{K}(i\alpha_1\alpha_2) = 2cp_3\left[\sum_{r,s} C_r^*(cp_1(\sigma_1)_{rs} + cp_2(\sigma_2)_{rs} + cp_3(\sigma_3)_{rs})\, C_s\right]$$
$$+ 2\mu'\left[W + \mu'\right]\left(\sum_{r,s} C_r^*(\sigma_3)_{rs}\, C_s\right).$$

On voit sur ces expressions que les densités des composantes du spin se représentent par une somme de deux termes. C'est la présence du premier de ces termes qui cause la dissymétrie apparente de ces densités lorsque l'on fait $p_x = p_y = 0$, $p_z \neq 0$. (Voir « L'Electron magnétique », p. 221. On retrouve les formules de M. L. de Broglie en divisant les nôtres par $(W + \mu')^2$.)

6° $\quad K = i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

$$H_1 = -\sum_i cp_i\alpha_i$$

$$aH_1K = a\left[W_i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \mu' i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\right].$$

En développant et exprimant les termes en σ et ρ l'on obtient l'élément r_2, s_2, ce qui donne

$$K(\mathrm{i}\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = -2[W+\mu']\left[\sum_{r,s} C_r^*(cp_1(\sigma_1)_{rs} + cp_2(\sigma_2)_{rs} + cp_3(\sigma_3)_{rs})\, C_s\right]$$

7° $$K = \mathrm{i}\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

$$H_1 = -c[p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3] - \mu'\alpha_4 = H + cp_1\alpha_1$$

$$aH_1K = a[W\mathrm{i}\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + cp_1\mathrm{i}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4]$$

d'où

$$\overline{K}(\mathrm{i}\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = -2W[W+\mu']\left(\sum_{r,s} C_r^*(\sigma_1)_{rs} C_r\right) + 2cp_1\left[\sum_{r,s} C_r^*(cp_1(\sigma_1)_{rs} + cp_2(\sigma_2)_{rs} + cp_3(\sigma_3)_{rs})\, C_s\right]$$

8° $$K = \mathrm{i}\alpha_1\alpha_4$$

$$H_1 = -c[p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3]$$

$$aH_1K = ac[p_2\mathrm{i}\alpha_1\alpha_2\alpha_4 - p_3\mathrm{i}\alpha_3\alpha_1\alpha_4]$$

d'où

$$K(\mathrm{i}\alpha_1\alpha_4) = 2[W+\mu']\left[\sum_{rs} C_r^*(cp_3(\sigma_2)_{rs} - cp_2(\sigma_3)_{rs})\, C_s\right].$$

Si nous examinons ces densités, nous voyons qu'elles ne dépendent des constantes C_1, C_2 que par l'intermédiaire des quatre formes quadratiques

$$A_0 = \sum_{rs} C_r^* \delta_{rs} C_s, \qquad A_1 = \sum_{rs} C_r^*(\sigma_1)_{rs} C_s.$$

$$A_2 = \sum_{rs} C_r^*(\sigma_2)_{rs} C_s, \qquad A_3 = \sum_{rs} C_r^*(\sigma_3)_{rs} C_s.$$

Si nous posons

$$M = \sum_{rs} C_r^*[cp_1(\sigma_1)_{rs} + cp_2(\sigma_2)_{rs} + cp_3(\sigma_3)_{rs}]\, C_s = cp_1A_1 + cp_2A_2 + cp_3A_3$$

Nous pouvons écrire les seize densités sous la forme suivante :

$$\overline{K}(1) = \rho = 2W[W+\mu']\left(\sum_{rs} C_r^* \delta_{rs} C_s\right)$$

$$\overline{K}(\alpha_i) = j_i = -2cp_i[W+\mu']\left(\sum_{rs} C_r^* \delta_{rs} C_s\right)$$

$$\overline{K}(\alpha_4) = \Omega_1 = -2m_0c^2[W+\mu']\left(\sum_{rs} C_r^* \delta_{rs} C_s\right)$$

$$\overline{K}(\mathrm{i}\alpha_2\alpha_3) = 2\mu'[W+\mu']\left(\sum_{rs} C_r^*(\sigma_1)_{rs} C_s\right) + 2cp_1M$$

$$\overline{K}(\mathrm{i}\alpha_3\alpha_1) = 2\mu'[W+\mu']\left(\sum_{rs} C_r^*(\sigma_2)_{rs} C_s\right) + 2cp_2M$$

$$\overline{K}(\mathrm{i}\alpha_1\alpha_2) = 2\mu'[W+\mu']\left(\sum_{rs} C_r^*(\sigma_3)_{rs} C_s\right) + 2cp_3M$$

$$\overline{K}(\mathrm{i}\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = -2[W+\mu']M$$

$$\overline{K}(\mathrm{i}\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = -2W[W+\mu']\left(\sum_{rs} C_r^*(\sigma_1)_{rs} C_s\right) + 2cp_1M$$

$$\overline{K}(\mathrm{i}\alpha_3\alpha_1\alpha_4) = -2W[W+\mu']\left(\sum_{r,s} C_r^*(\sigma_2)_{rs} C_s\right) + 2cp_2M$$

$$\overline{K}(\mathrm{i}\alpha_1\alpha_2\alpha_4) = -2W[W+\mu']\left(\sum_{r,s} C_r^*(\sigma_3)_{rs} C_s\right) + 2cp_3M$$

$$\overline{K}(\mathrm{i}\alpha_1\alpha_4) = 2[W+\mu']\left(cp_3\sum_{rs} C_r^*(\sigma_2)_{rs} C_s - cp_2\sum_{rs} C_r^*(\sigma_3)_{rs} C_s\right)$$

$$\overline{K}(\mathrm{i}\alpha_2\alpha_4) = 2[W+\mu']\left(cp_1\sum_{rs} C_r^*(\sigma_3)_{rs} C_s - cp_3\sum_{rs} C_r^*(\sigma_1)_{rs} C_s\right)$$

$$\overline{K}(\mathrm{i}\alpha_3\alpha_4) = 2[W+\mu']\left(cp_2\sum_{rs} C_r^*(\sigma_1)_{rs} C_s - cp_1\sum_{rs} C_r^*(\sigma_2)_{rs} C_s\right)$$

$$\overline{K}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = 0.$$

On peut vérifier facilement en faisant dans ces formules $p_1 = p_2 = 0$ que l'on retrouve à un facteur $\frac{1}{(W+\mu')^2}$ près les densités de valeur moyenne données par M. L. de Broglie. Cette différence disparaîtrait si l'on introduisait dans les densités ci-dessus la grandeur ρ.

En terminant, je tiens à remercier Monsieur le Professeur Louis de Broglie pour la bienveillante attention qu'il a accordée à ce travail.

Manuscrit reçu le 14 février 1938.