SÉRIE VII. — TOME X. N° 12. DÉCEMBRE 1939.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES CORPUSCULES ÉLÉMENTAIRES ET LA THÉORIE DU PHOTON

Par GÉRARD PETIAU.
Institut Henri Poincaré.

Sommaire. — Dans le but de faire rentrer la théorie du photon de M. Louis de Broglie dans le cadre de la théorie structurale des corpuscules élémentaires, on établit les bases d'une théorie corpusculaire générale appliquant les principes de la mécanique ondulatoire tout en suivant un formalisme voisin de celui de la théorie électromagnétique classique. Le cas de l'équation d'ondes de l'électron de Dirac étant écarté, l'étude du cas le plus simple permet de retrouver d'une façon très générale la théorie du photon de M. Louis de Broglie sous ses deux aspects corpusculaire et électromagnétique sans nécessiter de spécialisation des matrices servant à représenter le système des équations d'ondes.

Nous nous proposons dans ce travail de développer une théorie ondulatoire des corpuscules élémentaires permettant de faire rentrer la théorie du photon de M. Louis de Broglie dans le cadre général de la théorie structurale des équations d'ondes corpusculaires. Notre point de vue toutefois s'appuiera sur des hypothèses assez différentes de celles que M. J. L. Destouches (1) introduit dans ses travaux et plus restrictives que celles que nous avions posées dans notre thèse (2). Nous serons amené ainsi à étudier dans un cas défini sans ambiguïté un seul type d'équation d'ondes. Néanmoins des extensions possibles de notre théorie conduisant à la représentation de corpuscules plus généraux se déduiraient facilement des principes que nous prenons pour base.

I. Les principes généraux de la théorie des corpuscules élémentaires.

1. Nous admettrons d'abord que la représentation d'un corpuscule en état de mouvement doit s'effectuer au moyen d'un système de fonctions d'ondes $\Phi_i(x,y,z,t)$ dépendant toutes explicitement du temps. Cette hypothèse n'est évidemment justifiable que pour des états de mouvement proprement dit et non pour tous les états du corpuscule. Elle n'est pas acceptable pour des états singuliers tels que des états d'annihilation pour lesquels le corpuscule perd son individualité.

Notre théorie ayant pour but de rechercher des équations d'ondes régissant une évolution des états de mouvement, nous ne postulerons pas *a priori* l'existence d'états d'annihilation.

2. Nous admettrons également que les fonctions d'ondes $\mathbf{\Phi}$ (x, y, z, t) sont des solutions d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles du premier ordre assujetties aux conditions ordinaires d'être finies, uniformes et continues et de carrés sommables.

Nous représenterons ce système par l'équation

$$\partial_t \Phi_i = \left(\sum_p^3 \partial_p A_p + \lambda A_4 \right) \Phi_i = H \Phi_i. \qquad (1)$$

Nous posons

$$\partial_t = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial_t}, \qquad \partial_p = \frac{\partial}{\partial x_p}, \qquad \lambda = \frac{2\pi i}{h} m_0 c.$$

A_p, A_4 représentent quatre matrices carrées hermitiques dont nous ne précisons pas le rang.

3. Nous admettrons encore pour retrouver la relation relativiste classique liant l'énergie, l'impulsion et la masse

$$W^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4,$$

(1) J. L. DESTOUCHES, *Les électrons lourds* (Paris, Hermann, 1938).

(2) G. PETIAU, Contribution à la théorie des équations d'ondes corpusculaires, *Thèse*, Paris, 1936.

tout au moins dans le cas limite où l'énergie et l'impulsion sont bien définies, c'est-à-dire lorsque le corpuscule est représentable par une onde plane à énergie positive, que toutes les fonctions d'ondes correspondant à des états de mouvement satisfont à l'équation d'ondes du second ordre

$$\partial_t^2 \Phi_i = (\Delta + \lambda^2)\Phi_i. \tag{2}$$

Cette équation du second ordre n'est évidemment pas la seule à laquelle doivent satisfaire les Φ_i. En effet, en itérant l'équation (1), nous obtenons

$$\partial_t^2 \Phi_i = (H)^2 \Phi_i. \tag{3}$$

Si l'on admet que les équations (2) et (3) entraînent l'identité entre opérateurs

$$\Delta + \lambda^2 = (H)^2, \tag{4}$$

on est conduit à prendre pour H un opérateur linéarisant $\Delta + \lambda^2$. Un tel opérateur est nécessairement de la forme

$$\sum_1^3{}_p \partial_p \alpha_p + \lambda \alpha_4,$$

α_p, α_4 étant liés par la relation

$$\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu}.$$

L'équation (1) se réduit alors nécessairement à l'équation de Dirac.

Ce résultat pourrait d'ailleurs être obtenu d'une façon différente. J'ai en effet montré précédemment [1] que si l'on considère une équation linéaire de la forme (1), le seul cas où cette équation considérée seule peut conserver sa forme si les coordonnées subissent une transformation de Lorenz est précisément le cas ou l'équation considérée se réduit à l'équation de Dirac. Dans tout autre cas pour qu'une équation d'ondes puisse conserver une forme invariante, il est nécessaire (mais évidemment non suffisant) que cette équation s'écrive sous la forme

$$\partial_t A_0 \Phi = H\Phi. \tag{5}$$

une matrice A_0 figurant devant l'opérateur ∂_t, c'est sous cette forme (5) que j'ai étudié des équations d'ondes générales dans ma thèse et c'est à ce point de vue que s'est également placé M. J. L. Destouches dans ses travaux de physique structurale. Je serai d'ailleurs conduit ultérieurement dans cette étude à retrouver pour l'équation d'ondes que nous étudierons une représentation de la forme (5).

Néanmoins, pour l'instant, nous admettrons que les ondes Φ_i satisfont a un système d'équations de la forme

$$\partial_t \Phi_i = H\Phi_i.$$

[1] *Thèse*, p. 37.

Nous pouvons remarquer que l'identification (4) n'est pas imposée dans tous les cas. En effet, les équations (2) et (3) ne sont des conditions qu'à l'égard des fonctions d'ondes. Elles nous conduisent à poser

$$(\Delta + \lambda^2)\Phi = (H)^2\Phi, \tag{6}$$

mais n'imposent pas l'identification des opérateurs. Cette remarque peut s'illustrer d'un exemple bien connu : si l'on considère la représentation classique des équations de Maxwell dans le vide l'opérateur H est le rotationnel dont l'itéré n'est pas le laplacien et néanmoins l'équation (2) (où $\lambda = 0$) est satisfaite par les champs.

La possibilité de ce fait tient à ce que l'on adjoint au système d'équations d'évolution (1) un système supplémentaire d'équations de conditions de la forme

$$0 = \left(\sum_1^3{}_p \partial_p B_p + \lambda B_4\right)\Phi_i = H'\Phi_i, \tag{7}$$

B_p, B_4 formant un système de matrices carrées hermitiques.

Si nous admettons que les fonctions Φ_i satisfont en plus de (1) à un système de la forme (7), les opérateurs H et H' ne sont pas totalement indépendants. Les deux équations (1) et (7) devant être compatibles, les opérateurs H et H' doivent être tels que

$$H'H = 0. \tag{8}$$

Dans la théorie électromagnétique classique, l'opérateur H' est l'opérateur divergence et la condition (8) est satisfaite en raison de l'identité

$$\operatorname{div} \operatorname{Rot} = 0.$$

Si nous considérons maintenant un nouvel opérateur différentiel linéaire soit K tel que

$$K = \Sigma_p \partial_p C_p + \lambda C_4, \tag{9}$$

nous pourrons déduire de l'équation de condition (7) une nouvelle équation du second ordre vérifiée par Φ, soit

$$KH'\Phi_i = 0. \tag{10}$$

Cette équation considérée simultanément avec l'équation

$$\partial_t^2 \Phi_i = H^2 \Phi_i$$

nous donnera une équation du second ordre également vérifiée par les Φ_i soit

$$\partial_t^2 \Phi_i = (H^2 + KH')\Phi_i. \tag{11}$$

Nous admettrons qu'il existe un opérateur K de telle sorte que cette équation, étant satisfaite par les Φ_i, entraîne l'identité entre opérateurs

$$H^2 + KH' = \Delta + \lambda^2. \tag{12}$$

La considération de cette identité et de la condition $HH' = 0$ va nous permettre d'établir un certain nombre d'identités entre opérateurs.

L'équation (12) multipliée à droite par H donne immédiatement

$$H^3 = (\Delta + \lambda^2) H. \tag{13}$$

La multiplication à gauche de (12) par H donne alors

$$HKH' = 0 \tag{14}$$

et

$$H'KH' = (\Delta + \lambda^2) H'. \tag{15}$$

En particulier, si K et H' commutent ou anticommutent, la dernière relation nous donne

$$HKH'^2 = (\Delta + \lambda^2) HH' = 0,$$

d'où nous tirons

$$HH' = 0. \tag{16}$$

Nous pouvons remarquer que les relations (12), (13), (14) et (15) sont vérifiées dans la théorie électromagnétique de Maxwell. Mais là, nous n'avons pas $KH' = \pm H'K$ ($H' = \mathrm{div}$, $K = \mathrm{grad}$, $H = \mathrm{Rot}$) et nous n'avons pas $HH' = 0$.

La relation (13) dans le cas où les fonctions d'ondes sont représentées par une onde plane monochromatique telle que

$$\Phi_i = a_i e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - \mathbf{p}\mathbf{x})}$$

nous donne, par substitution dans l'équation

$$\partial_t^3 \Phi_i = (\Delta + \lambda^2) \partial_t \Phi,$$

la relation

$$W^3 = (c^2 p^2 + m_0^2 c^4) W.$$

Par suite l'opérateur d'énergie ∂_t comprendra non seulement des états d'énergie classique définis à partir de la quantité de mouvement par la relation

$$W^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4,$$

mais encore des états d'énergie nulle $W = 0$.

La linéarisation de la relation opératorielle

$$H^3 = (\Delta + \lambda^2) H$$

ne suffit pas en général pour déterminer les matrices A_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$).

Si l'on effectue cette linéarisation on voit facilement que les matrices A_μ sont telles que $(A_\mu)^3 = A_\mu$ et si nous désignons par $A(\mu, \nu)$ l'expression

$$A_{(\mu,\nu)} = A_\mu A_\nu + A_\nu A_\mu$$

satisfont à la relation

$$A_\mu A_{(\nu,\lambda)} + A_\nu A_{(\lambda,\mu)} + A_\lambda A_{(\mu,\nu)} = 2(A_\mu \delta_{\nu\lambda} + A_\nu \delta_{\lambda\mu} + A_\lambda \delta_{\mu\nu}).$$

Remarquons que jusqu'ici, nous n'avons pas tenu compte des deux principes directeurs de toute recherche d'équations d'ondes, l'invariance relativiste et l'attribution au corpuscule d'un spin déterminé.

De plus, la théorie que nous développons ici ne fait intervenir qu'une équation de condition ($H'\Phi = 0$) une théorie plus générale ferait intervenir plusieurs équations de condition.

Nous ne donnerons qu'une esquisse des bases de cette théorie générale.

Si un corpuscule général est susceptible de plusieurs états massiques auxquels correspondent des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, l'opérateur hamiltonien devra satisfaire à une équation caractéristique de la forme

$$f(H) = [H^2 - (p^2 + \lambda_1^2)] \times [H^2 - (p^2 + \lambda_2^2)] \ldots [H^2 - (p^2 + \lambda_n^2)] = 0,$$

aux différents opérateurs H_1, H_2, ..., H_n linéarisant $f(H)$ correspondent des équations d'ondes telles que

$$\partial_t \psi_i = H_i \psi_i$$

si un seul état énergétique $W^2 = p^2 + \lambda_i^2$ est réalisé nous devrons avoir

$$\partial_t^2 \psi = (H_i)^2 \psi = (\Delta + \lambda_i^2) \psi$$

et

$$H_1 \psi = H_2 \psi = H_p \psi = 0 \qquad (p \neq i).$$

L'opérateur $(H_i)^2$ complété donnera la relation opératorielle

$$(H_1)^2 + (H_2)^2 + \ldots + (H_i)^2 + \ldots + (H_n)^2 = \Delta + \lambda_i^2.$$

Nous aurons également un système d'équation de compatibilité entre opérateurs

$$H_j H_i = 0, \qquad j \neq i \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

II. **Application à la théorie générale du photon.**

1. **Forme de l'équation d'ondes**. — Les développements précédents nous conduisaient à introduire trois opérateurs H, H' et K. La théorie corpusculaire de ce type la plus simple sera celle ou le nombre d'opérateurs fondamentaux est réduit à deux, l'opérateur K étant identique à H'.

Nous avons alors

$$\left.\begin{aligned} H^2 + H'^2 &= \Delta + \lambda^2, \\ HH' = H'H &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

H et H' satisfont alors indépendamment aux relations

$$(H)^3 = (\Delta + \lambda^2) H; \qquad (H')^3 = (\Delta + \lambda^2) H'. \tag{21}$$

Nous pourrons préciser la forme de ces opérateurs si nous considérons les deux systèmes d'équations vérifiées simultanément par les Φ_i

$$\partial_t \Phi_i = (H + H') \Phi_i = H^{(a)} \Phi_i,$$
$$\partial_t \Phi_i = (H - H') \Phi_i = H^{(b)} \Phi_i.$$

Les opérateurs $H^{(a)}$ et $H^{(b)}$ sont alors tels que

$$
\begin{aligned}
[H^{(a)}]^2 &= H^2 + H'^2 = \Delta + \lambda^2, \\
[H^{(b)}]^2 &= H^2 + H'^2 = \Delta + \lambda^2. \\
H^{(a)} H^{(b)} &= H^{(b)} H^{(a)} = H^{(2)} - H'^2.
\end{aligned}
$$

Ces identités nous montrent que $H^{(a)}$ et $H^{(b)}$ sont deux linéarisations indépendantes de l'opérateur $\Delta + \lambda^2$.

Nous pourrons donc poser

$$
\left.
\begin{aligned}
H^{(a)} &= \Sigma_p \partial_p a_p + \lambda a_4, \\
H^{(b)} &= \Sigma_p \partial_p b_p + \lambda b_4,
\end{aligned}
\right\} \tag{22}
$$

Les a_μ et b_μ sont alors liés entre eux par les relations

$$a_\mu a_\nu + a_\nu a_\mu = 2\delta_{\mu\nu}; \qquad b_\mu b_\nu + b_\nu b_\mu = 2\delta_{\mu\nu}.$$

Réciproquement, les A_μ et B_μ s'expriment par

$$A_\mu = \frac{1}{2}(a_\mu + b_\mu); \qquad B_\mu = \frac{1}{2}(a_\mu - b_\mu).$$

Au moyen de ces expressions, nous pouvons établir des relations liant directement entre eux les A_μ et B_μ sans passer par l'intermédiaire des a_μ et b_μ.

Nous obtenons facilement les relations

$$
\left.
\begin{aligned}
A_\mu A_\nu A_\lambda + A_\lambda A_\nu A_\mu &= A_\mu \delta_{\nu\lambda} + A_\lambda \delta_{\nu\mu}; \\
B_\mu B_\nu B_\lambda + B_\lambda B_\nu B_\mu &= B_\mu \delta_{\nu\lambda} + B_\lambda \delta_{\nu\mu}; \\
A_\mu A_\nu + B_\nu B_\mu &= 0; \\
A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu &= 0; \\
B_\mu A_\nu + B_\nu A_\mu &= 0.
\end{aligned}
\right\} \tag{23}
$$

Ces relations permettent de calculer directement sur les A_μ et les B_μ. Mais on peut remarquer que les produits les plus simples des A_μ et B_μ ne sont pas en général hermitiques. Nous représenterons plutôt les matrices dérivées des a_μ et b_μ par un système de matrices A et B plus général en posant

$$A_{ijk\ldots}^{lmn\ldots} = \frac{1}{2}(a_i a_j a_k \ldots b_l b_m b_n \ldots + a_l a_m a_n \ldots b_i b_j b_k \ldots),$$

$$B_{ijk\ldots}^{lmn\ldots} = \frac{1}{2}(a_i a_j a_k \ldots b_l b_m b_n \ldots - a_l a_m a_n \ldots b_i b_j b_k \ldots).$$

Les matrices de cette forme satisfont à des lois de combinaisons très simples. En désignant par a, b, ..., p, q, ... les groupes d'indices (i, j, k), (l, m, n), ..., nous aurons

$$
\left.
\begin{aligned}
A_a^p A_b^q &= \frac{1}{2}(A_{ab}^{pq} + A_{aq}^{pb}); \\
B_a^p B_b^q &= \frac{1}{2}(A_{ab}^{pq} - A_{aq}^{pb}); \\
A_a^p B_b^q &= \frac{1}{2}(B_{ab}^{pq} - B_{aq}^{pb}); \\
B_a^p A_b^q &= \frac{1}{2}(B_{ab}^{pq} + B_{aq}^{pb}).
\end{aligned}
\right\} \tag{24}
$$

2. **Forme relativiste et invariance relativiste de l'équation d'ondes.** — Le système

$$\partial_t \Phi_i = H \Phi_i, \qquad 0 = H' \Phi_i \tag{25}$$

peut être remplacé par un nouveau système équivalent au premier en multipliant ces équations d'une part par A_4 et B_4 et d'autre part par B_4 et A_4 et en ajoutant ou retranchant les équations obtenues. On obtient ainsi, en utilisant les règles de multiplication (24) les deux systèmes

$$
\left.
\begin{aligned}
A_4 \partial_t \Phi_i &= (\Sigma_p \partial_p A_4^p + \lambda A_4^4) \Phi_i, \\
B_4 \partial_t \Phi_i &= (\Sigma_p \partial_p B_4^p) \Phi_i.
\end{aligned}
\right\} \tag{26}
$$

et

$$
\left.
\begin{aligned}
A_4 \partial_t \Phi_i &= (\Sigma_p \partial_p A_{4p} + \lambda) \Phi_i, \\
B_4 \partial_t \Phi_i &= (\Sigma_p \partial_p B_{4p}) \Phi_i.
\end{aligned}
\right\} \tag{27}
$$

Ces deux systèmes sont équivalents, car le second se déduit du premier par multiplication par la matrice $A_4^4 = a_4 b_4$. Mais tandis que toutes les matrices du premier sont hermitiques, les matrices B_4 et A_4 du second sont antihermitiques.

Posant alors

$$\Gamma_4 = A_4; \qquad J_4 = B_4; \qquad \Gamma_p = iA_{4p}; \qquad J_p = iB_{4p};$$

$$x_4 = ict; \qquad \frac{2\pi}{h} m_0 c = \mu,$$

le système (27) se réduit aux deux équations

$$\left(\sum_1^4{}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Gamma_\mu\right) \Phi_i = \mu \Phi_i; \qquad \left(\sum_1^4{}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} J_\mu\right) \Phi_i = 0. \tag{28}$$

Les systèmes (26) et (28) se réduisent chacun à une seule équation car la seconde est nécessairement vérifiée si la première l'est.

Si nous considérons par exemple la première des équations (28) et si nous la multiplions à gauche par l'opérateur de l'équation (28_2), nous obtenons

$$(\Sigma_\mu \partial_\mu J_\mu)(\Sigma_\mu \partial_\mu \Gamma_\mu) \Phi_i = \lambda (\Sigma_\mu \partial_\mu J_\mu) \Phi_i.$$

Or, en raison des relations

$$J_\mu \Gamma_\mu = 0, \qquad J_\mu \Gamma_\nu + J_\nu \Gamma_\mu = 0,$$

le premier membre est nul et l'équation (28_1) entraîne

$$(\Sigma_\mu \partial_\mu J_\mu) \Phi_i = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (28_2).

Nous pourrons donc nous borner, pour l'étude des états de mouvement, à l'équation

$$\partial_t A_4 \Phi_i = (\Sigma_p \partial_p A_4^p + \lambda A_4^4) \Phi_i$$

ou encore à la forme relativiste quadridimentionnelle

$$(\Sigma_\mu \partial_\mu \Gamma_\mu) \Phi_i = \mu \Phi_i.$$

Nous allons maintenant examiner comment se transforment les Φ_i lorsque les coordonnées subissent une transformation de Lorentz.

Cette étude peut se faire indifféremment à partir des équations (26) ou (28).

Si l'on considère l'équation (28_1) [l'équation (28_2) en est une conséquence] et si les coordonnées subissent la transformation générale de Lorentz représentée par la rotation quadridimentionnelle

$$x'_\mu = \Sigma_\nu O_{\mu\nu} x_\nu$$

avec

$$\Sigma_\mu O_{\mu\nu} O_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho} \qquad \text{dét.}\ |O_{\mu\nu}| = +1.$$

l'équation d'ondes pourra conserver sa forme si l'on peut trouver une substitution linéaire S telle que les fonctions d'ondes du second système $\Phi'(x', y', z', t')$ se déduisent des fonctions d'ondes du premier système $\Phi(x, y, z, t)$ par la relation $\Phi' = S\,\Phi$, S étant solution de l'équation

$$S^{-1} \Gamma_\mu S = O_{\mu\lambda} \Gamma_\lambda. \tag{29}$$

Pour résoudre cette équation, on passe aux transformations infinitésimales en posant

$$x'_\mu = I + \Sigma_\nu \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu \qquad (\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}),$$

$$S = I + \frac{1}{2} \Sigma_{(\mu\nu)} \varepsilon_{(\mu\nu)} T_{(\mu\nu)} \qquad (T_{(\mu\nu)} = -T_{(\nu\mu)}).$$

La condition (29) devient alors

$$\Gamma_\lambda T_{(\mu\nu)} - T_{(\mu\nu)} \Gamma_\lambda = \delta_{\mu\nu} \Gamma_\nu - \delta_{\lambda\nu} \Gamma_\mu.$$

La première des relations (23) permet de remplacer le second membre par l'expression

$$\Gamma_\lambda (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu) - (\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \Gamma_\lambda.$$

On en déduit par identification

$$T_{(\mu\nu)} = \Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu = \Gamma_{\mu\nu},$$

d'où

$$S = I + \frac{1}{2} \Sigma_{(\mu\nu)} \varepsilon_{(\mu\nu)} \Gamma_{\mu\nu}. \tag{30}$$

Dans le cas de l'équation (26), l'absence de symétrie entre les coordonnées d'espace et le temps oblige à séparer la rotation des axes de coordonnées et la transformation de Lorentz proprement dite.

On trouve dans ces deux cas les transformations infinitésimales suivantes :

1° *Rotation des axes de coordonnées d'espace* (angle α)

$$S = I + \alpha A_{ij}.$$

2° *Transformation de Lorentz* $\left(\text{argument } \gamma \text{ défini par } \operatorname{ch}\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$

$$S = I + \gamma A_i.$$

Les ondes Φ se transformant suivant la loi $\Phi' = S\Phi$ et S dépendant des matrices $\Gamma_{\mu\nu}$, il en résulte que l'on ne peut accorder aux ondes Φ une variance tensorielle déterminée. Néanmoins, nous pourrons montrer qu'il existe des combinaisons linéaires des Φ possédant des variances tensorielles déterminées. Mais auparavant, nous allons préciser le rang des matrices A_μ ou Γ_μ.

Les matrices a_μ, b_μ étant indépendantes, si nous définissons des matrices $a_{\mu\nu}$, $a_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu\rho}$, $b_{\mu\nu\rho}$, ... l'indépendance des systèmes a_μ et b_μ entraîne

$$a_{\mu\nu\rho\ldots} b_{\sigma\tau\ldots} = b_{\sigma\tau\ldots} a_{\mu\nu\rho\ldots}.$$

Or, les relations d'anticommutation entre a_μ et b_μ montrent que l'on peut définir avec les quatre a_μ un système complet de 16 matrices, avec les quatre b_μ un système complet de 16 matrices. Nous pourrons donc par combinaison des a_μ et b_μ former 256 matrices contenant tous les produits possibles entre a_μ et b_μ et par suite entre A_μ et B_μ. Ces matrices constitueront un système complet.

Si nous voulons représenter une matrice donnée arbitrairement soit M_{ik} sur ce système selon

$$M_{ik} = \sum_{(\lambda\mu\ldots)} C^{\lambda\mu\ldots\nu\rho} (a^{\lambda\mu\ldots} b^{\nu\rho\ldots})_{ik},$$

nous devrons pour déterminer les $C^{\lambda\mu\ldots\nu\rho\ldots}$ résoudre un système à 256 inconnues. Si le déterminant de celui-ci n'est pas nul il faudra disposer de 256 équations. Or, celles-ci correspondent aux différentes valeurs de i et de k. Par suite M_{ik} étant une matrice carrée, i et k devront varier respectivement de 1 à 16 et les matrices M_{ik}, $a_{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu}$, $a_{\nu\rho}\ldots$ $b_{\nu\rho}$ seront du 16e rang.

Nous pourrons alors, en utilisant un double système d'indices variant de 1 à 4, représenter les a_μ et b_μ par les notations $(\alpha_\mu)_{il}\delta_{km}$ et $(\beta_\mu)_{km}\delta_{il}$ les α_μ et β_μ étant des matrices du 4e rang.

Les Γ_μ et J_μ se représenteront alors par

$$(\Gamma_\mu)_{ik,lm} = \frac{1}{2}[(\gamma_\mu)_{il}\delta_{km} + (\gamma'_\mu)_{km}\delta_{il}],$$

$$(J_\mu)_{ik,lm} = \frac{1}{2}[(\gamma_\mu)_{il}\delta_{km} - (\gamma'_\mu)_{km}\delta_{il}],$$

les γ_μ et γ'_μ étant deux systèmes de matrices du 4e rang, les indices, i, k, l, m variant de 1 à 4.

3. **Représentation électromagnétique de l'équation d'ondes.** — Si nous représentons maintenant l'onde Φ au moyen d'un groupe de deux indices i, k, variant chacun de 1 à 4, s'il existe des combinaisons linéaires possédant une variance tensorielle déterminée, celles-ci se représenteront sous la forme

$$(\Lambda^A)_{ki} \Phi_{ik},$$

Λ^A étant une matrice.

Si nous cherchons par exemple à quelle condition $(\Lambda^A)_{ki}\Phi_{ik}$ représente un invariant, nous aurons

$$[(\Lambda^A)_{ki}\Phi_{ik}]' = (\Lambda^A)_{ki}\Phi'_{ik} = (\Lambda^A)_{ki}\left[I + \frac{1}{2}\sum_{(\mu\nu)} \varepsilon_{(\mu\nu)}\Gamma_{(\mu\nu)}\right]_{ik,lm} \Phi_{lm}$$
$$= (\Lambda^A)_{ki}\Phi_{ik},$$

ce qui exige

$$(\Lambda^A)_{ki}(\Gamma_{\mu\nu})_{ik,lm} = 0$$

ou encore

$$\Lambda^A\gamma_{\mu\nu} + \bar{\gamma}'_{\mu\nu}\Lambda^A = 0, \tag{31}$$

$\bar{\gamma}'_{\mu\nu}$ désignant la matrice transposée de $\gamma'_{\mu\nu}$. Or M. Pauli a montré que si l'on considère deux systèmes de matrices tels que

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \qquad \gamma'_\mu\gamma'_\nu + \gamma'_\nu\gamma'_\mu = 2\delta_{\mu\nu},$$

il existe une transformation S non singulière telle que

$$\gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1}$$

et que d'autre part, il existe une matrice B telle que

$$\bar{\gamma}_\mu = B\gamma_\mu B^{-1}.$$

Si nous remarquons que

$$\bar{\gamma}'_{\mu\nu} = \bar{\gamma}'_\nu\bar{\gamma}'_\mu = -\gamma_\mu\bar{\gamma}_\nu,$$

la condition (31) devient

$$\Lambda^A\gamma_{\mu\nu} - BS\gamma_{\mu\nu}S^{-1}B^{-1}\Lambda^A = 0.$$

Si nous posons

$$BS = R, \qquad S^{-1}B^{-1} = R^{-1},$$

il vient

$$(R^{-1}\Lambda^A)\gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}(R^{-1}\Lambda^A) = 0. \tag{32}$$

$R^{-1}\Lambda^A$ doit donc être une matrice commutant avec tous les $\gamma_{\mu\nu}$, c'est-à-dire, soit commutant, soit anticommutant avec tous les γ_μ.

Deux solutions sont possibles

$$R^{-1}\Lambda^A = 1, \qquad R^{-1}\Lambda^A = \gamma_{1234} = \gamma_5;$$

nous en tirons les deux valeurs de Λ^A

$$\Lambda^A = R, \qquad \Lambda^A = R\gamma_5,$$

qui nous permettent de former les deux combinaisons linéaires invariantes

$$I = R_{ki}\Phi_{ik}, \qquad J = (R\gamma_5)_{ki}\Phi_{ik}. \tag{33}$$

Si nous cherchons les matrices Λ^μ telles que les combinaisons linéaires $(\Lambda^\mu)_{ki}\Phi_{ik}$ se transforment comme des composantes de vecteur, nous avons

$$\begin{aligned}(\Lambda^\mu\Phi)' &= \Lambda^\mu\Phi + \frac{1}{2}\sum_{(\mu\nu)}\varepsilon_{\mu\nu}(\Lambda^\mu\Gamma^{(\mu\nu)})\Phi \\ &= \Lambda^\mu\Phi + \Sigma_\nu\varepsilon_{\mu\nu}(\Lambda^\nu)\Phi,\end{aligned}$$

on doit alors avoir

$$\Lambda^\nu = \Lambda^\mu\Gamma_{\mu\nu},$$

d'où

$$R^{-1}\Lambda^\nu = \frac{1}{2}[(R^{-1}\Lambda^\mu)\gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}(R^{-1}\Lambda^\mu)], \tag{34}$$

cette relation ne peut être satisfaite que si $R^{-1}\Lambda^\mu$ anticommute avec les $\gamma_{\mu\nu}$ et si $R^{-1}\Lambda^\mu = R^{-1}\Lambda^\mu\gamma_{\mu\nu}$, $R^{-1}\Lambda^\mu$ doit alors soit commuter avec γ_μ et anticommuter avec tous les γ_μ, soit anticommuter avec γ_μ et commuter avec tous les γ_ν. La première alternative ne peut être réalisée que si $R^{-1}\Lambda^\mu = \gamma_\mu$, la seconde que si $R^{-1}\Lambda^\mu = \gamma^{\nu\rho\lambda}$ $(\nu, \rho, \lambda \neq \mu)$.

La seconde relation est alors toujours vérifiée dans le premier cas et dans le second impose un ordre aux composantes de $\gamma_{\nu\rho\lambda}$ qui s'écrit encore $\gamma_5\gamma_\mu$.

Nous obtenons ainsi les deux vecteurs

$$\begin{aligned}V^\mu &= (R\gamma_\mu)_{ki}\Phi_{ik}, \\ W^\mu = V^{\nu\rho\lambda} &= (R\gamma_{\nu\rho\lambda})_{ki}\Phi_{ik}.\end{aligned}$$

Un calcul analogue montre que l'on peut également définir un tenseur antisymétrique du second ordre $T^{\mu\nu}$ dont les composantes se représentent par

$$T^{\mu\nu} = (R\gamma_{\mu\nu})_{ki}\Phi_{ik}.$$

Nous pouvons donc, quel que soit la représentation considérée pour les γ_μ et les γ'_μ, trouver des combinaisons linéaires possédant les caractères tensoriels de deux invariants, des composantes de deux vecteurs et des six composantes d'un tenseur antisymétrique du second ordre.

Réciproquement, nous pouvons chercher à former un système d'équations équivalent au système

$$(\Sigma_\mu\partial_\mu\Gamma_\mu)\Phi = \mu\Phi \tag{28}$$

ne portant plus sur les Φ, mais sur les grandeurs

$$I, \quad J, \quad V^\mu, \quad W^\mu \quad \text{et} \quad T^{\mu\nu}.$$

L'équation (28) se développe suivant

$$\left[\Sigma_\mu\partial_\mu\frac{1}{2}[(\gamma_\mu)_{il}\delta_{km} + (\gamma'_\mu)_{km}\delta_{il}]\right]\Phi_{lm} = \mu\Phi_{ik}.$$

Cette équation multipliée à gauche par Λ^A_{ki} donne

$$\left[\Sigma_\mu\partial_\mu\frac{1}{2}(\Lambda^A\gamma_\mu + R\gamma_\mu R^{-1}\Lambda^A)_{lm}\right]\Phi_{lm} = \mu(\Lambda^A)_{ki}\Phi_{ik}.$$

Or nous avons vu que $\Lambda^A = R\gamma^A$. Nous en tirons

$$\Sigma_\mu\partial_\mu\frac{1}{2}R(\gamma^A\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^A)_{lm}\Phi_{lm} = \mu(R\gamma^A)_{ki}\Phi_{ik}. \tag{35}$$

Selon la matrice γ^A, cette équation donnera naissance à 16 équations portant sur les grandeurs tensorielles.

Nous obtenons ainsi :

1° $\gamma^A = 1$

$$\Sigma_\mu\partial_\mu(R\gamma_\mu)\Phi = \mu R\Phi;$$

2° $\gamma^A = \gamma^5$

$$0 = \mu(R\gamma_5)\Phi;$$

3° $\gamma^A = \gamma_\mu$

$$\partial_\mu(R)\Phi = \mu(R\gamma_\mu)\Phi;$$

4° $\gamma^A = \gamma_{\mu\nu}$

$$[\partial_\sigma(R\gamma_{\mu\nu\sigma}) + \partial_\rho(R\gamma_{\mu\nu\rho})]\Phi = \mu(R\gamma_{\mu\nu})\Phi;$$

5° $\gamma^{\lambda} = \gamma^{\mu\nu\rho}$

$$[\partial_\mu(R\gamma^{\nu\rho}) + \partial_\nu(R\gamma^{\rho\mu}) + \partial_\rho(\gamma^{\mu\nu})]\Phi = \mu(R\gamma^{\mu\nu\rho})\Phi.$$

Ces équations s'écrivent encore

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma_\mu \partial_\mu V^\mu = \mu I; \qquad o = \mu J; \\ \partial_\mu I = \mu V^\mu; \qquad \partial_\sigma V^{\mu\nu\sigma} + \partial_\rho V^{\mu\nu\rho} = \mu T^{\mu\nu}; \\ \partial_\mu T^{\nu\rho} + \partial_\nu T^{\rho\mu} + \partial_\rho T^{\mu\nu} = \mu V^{\mu\nu\rho}. \end{array}\right\} \quad (36)$$

De même les équations dérivées du second système (28) nous donnent

$$\left.\begin{array}{r} \Sigma_\mu \partial_\mu V^{\nu\rho\sigma} = o. \\ \partial_\nu T^{\mu\nu} + \partial_\rho T^{\mu\rho} + \partial_\sigma T^{\mu\nu} = o, \\ \partial_\mu V^\nu - \partial_\nu V^\mu = o. \\ \partial_\sigma J = o. \end{array}\right\} \quad (37)$$

On peut voir facilement que ces systèmes (36) et (37) se ramènent aux systèmes d'équations du photon de M. L. de Broglie moyennant un simple changement de notations (I et J correspondent aux invariants I_2 et I_1, V_μ au vecteur $\vec{\sigma}$, W^μ ou $V^{\nu\rho\sigma}$ au potentiel vecteur, $T^{\mu\nu}$ au tenseur de champ).

4. **Les densités de valeurs moyennes des grandeurs attachées au photon.** — Les transformations que subissent les Γ_μ ou les J_μ dans une transformation de Lorentz

$$S^{-1}\Gamma_\mu S = O_{\mu\lambda}\Gamma_\lambda; \qquad S^{-1}J_\mu S = O_{\mu\lambda}J_\lambda$$

nous permettent d'étudier les variances des densités de valeurs moyennes de la forme

$$\Phi^+ F\Phi,$$

F étant un des opérateurs matrices déduits par combinaison des Γ_μ ou des J_μ.

Si nous examinons ces matrices, nous voyons que nous pouvons définir :

1° Quatre invariants correspondant aux valeurs de F

$$1 = \gamma_0 j_0; \qquad \Gamma_5^5 = \gamma_5 j_5; \qquad \Gamma_0^5; \quad J_0^5.$$

2° Huit vecteurs correspondant aux valeurs de F

$$\Gamma_0^\mu, \quad \Gamma_5^\mu, \quad J_0^\mu, \quad J_5^\mu, \quad \Gamma_0^{5\mu}, \quad J_0^{5\mu}, \quad \Gamma_5^{5\mu}, \quad J_5^{5\mu}.$$

3° Six tenseurs antisymétriques du second ordre

$$\Gamma_0^{\mu\nu}, \quad \Gamma_{\mu\nu}^5, \quad J_{\mu\nu}^0, \quad J_{\mu\nu}^5, \quad J_\mu^\nu, \quad J_{\mu 5}^{\nu 5}.$$

4° Deux tenseurs symétriques du second ordre

$$\Gamma_\mu^\nu \quad \text{et} \quad \Gamma_{5\mu}^{5\nu}.$$

5° Deux tenseurs complets du second rang

$$\Gamma_{5\mu}^\nu \quad \text{et} \quad J_{5\mu}^\nu.$$

Ces deux tenseurs peuvent encore se décomposer chacun en un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique selon

$$E_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{4}(\Gamma_{5\mu}^\nu + \Gamma_{5\nu}^\mu + J_{5\mu}^\nu + J_{5\nu}^\mu) = E_{\nu\mu}^1;$$

$$E_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{4}(\Gamma_{5\mu}^\nu + \Gamma_{5\nu}^\mu - J_{5\mu}^\nu - J_{5\nu}^\mu) = E_{\nu\mu}^2;$$

$$F_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{4}(\Gamma_{5\mu}^\nu - \Gamma_{5\nu}^\mu + J_{5\mu}^\nu - J_{5\nu}^\mu) = -F_{\nu\mu}^1;$$

$$F_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{4}(\Gamma_{5\mu}^\nu - \Gamma_{5\nu}^\mu - J_{5\mu}^\nu + J_{5\nu}^\mu) = -F_{\nu\mu}^2.$$

6° Quatre tenseurs du troisième ordre antisymétriques sur deux indices et réduits à 24 composantes

$$\Gamma_\mu^{\nu\rho}, \quad \Gamma_{5\mu}^{\nu\rho}, \quad J_\mu^{\nu\rho}, \quad J_{5\mu}^{\nu\rho}.$$

7° Un tenseur du quatrième ordre à 21 composantes $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ et un tenseur du quatrième ordre à 15 composantes $J_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$.

5. **Expression de la solution générale de l'équation d'ondes.** — Considérons le premier système d'équations

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_t\Phi = (\Sigma_p \partial_p A_p^0 + \lambda A_4^0)\Phi = H\Phi, & (a) \\ o = (\Sigma_p \partial_p B_p^0 + \lambda B_4^0)\Phi. & (b) \end{array}\right\} \quad (38)$$

Nous pouvons chercher les solutions de ce système qui se réduisent pour $t = o$ à un système de fonctions initiales $F_i(x, y, z)$ données que nous supposons représentables par des intégrales de Fourier soient

$$F_i(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int F(\mathbf{p})\, e^{-i\mathbf{px}}\, d\mathbf{p}. \quad (39)$$

Nous poserons également

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \Phi(p, t)\, e^{-i\mathbf{px}}\, d\mathbf{p}. \quad (40)$$

Si nous substituons cette expression dans l'équation que nous écrivons en posant $\mu = -\frac{2\pi}{h} m_0 c$ sous la forme

$$\left[\frac{1}{ic}\partial_t + \Sigma_p\left(-\frac{1}{i}\right)\partial_p A_p^0 + \mu A_4^0\right]\Phi = o,$$

nous obtenons pour les Φ (p, t) l'équation

$$\left[\frac{1}{ic}\partial_t + \mathbf{p}A_p^0 + \mu A_4^0\right]\Phi(p, t) = o.$$

Posant

$$H(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{A}_p^0 + \mu\mathbf{A}_4^0,$$
$$H'(\mathbf{p}) = \mathbf{p}B_p^0 + \mu B_4^0,$$

la dernière équation s'écrit encore

$$\left[\frac{1}{ic}\partial_t + H(\mathbf{p})\right]\Phi(p.t) = o. \quad (41)$$

Nous en tirons par itération

$$\left(\frac{1}{ic}\right)^3(\partial_t)^3\Phi_i = k^2\frac{1}{ic}\partial_t\Phi_i \qquad (k^2 = p^2 + \mu^2).$$

Nous avons ici une équation du 3e ordre dont les racines de l'équation caractéristique sont o, $\pm k$.

La solution générale s'écrit alors

$$\Phi_i(p, t) = A_i e^{ikct} + B_i e^{-ikct} + C_i.$$

Mais, d'autre part, cette solution doit satisfaire à l'équation (41) et pour $t = 0$ se réduire aux F_i, nous obtenons le système

$$\begin{aligned} [k + H(\mathbf{p})] A_i &= 0, \\ [k - H(\mathbf{p})] B_i &= 0, \\ [H(\mathbf{p})] C_i &= 0, \\ A + B + C_i &= F. \end{aligned}$$

Nous en tirons facilement

$$A_i = \left[\frac{H^2 - kH}{2k^2}\right] F_i,$$

$$B_i = \left[\frac{H^2 + kH}{2k^2}\right] F_i,$$

$$C_i = \left[\frac{k^2 - H^2}{k^2}\right] F_i = \frac{(H')^2}{k^2} F_i.$$

La solution générale de l'équation (38 *a*) se représente donc par

$$\Phi_i(\mathbf{p}, t) = \left\{ \left[\frac{H^2 - kH}{2k^2}\right] F_i e^{ikct} + \left[\frac{H^2 + kH}{2k^2}\right] F_i e^{-ikct} + \frac{(H')^2}{k^2} F_i \right\} e^{-i\mathbf{px}}, \quad (42)$$

ou encore, en utilisant la relation

$$H^2 + H'^2 = k^2,$$

$$\Phi_i(\mathbf{p}, t) = \left\{ \left[\frac{k - H}{2k}\right] F(\mathbf{p}) e^{ikct} + \left[\frac{k + H}{2k}\right] F(\mathbf{p}) e^{-ikct} + \frac{(H')^2 F}{2k^2} \sin^2 \frac{kct}{2} \right\} e^{-i\mathbf{px}}. \quad (43)$$

L'équation (38 *b*) donne simplement une condition qui doit être remplie par les fonctions initiales, soit

$$H'(\mathbf{p}) F(x, y, z) = 0 \quad \text{ou} \quad H'(\mathbf{p}) F(\mathbf{p}) = 0.$$

Cette condition satisfaite réduit la solution précédente à

$$\Phi_i(p, t) = \left\{ \left(\frac{k - H(\mathbf{p})}{2k}\right) F_i(\mathbf{p}) e^{ikct} + \left(\frac{k + H(\mathbf{p})}{2k}\right) F_i(\mathbf{p}) e^{-ikct} \right\} e^{-i\mathbf{px}}. \quad (44)$$

Si nous désignons par $\Phi^{(m)}$ cette dernière solution la solution (43) peut s'écrire

$$\Phi(\mathbf{p}, t) = \Phi^{(m)} + \Phi^{(0)}.$$

Si nous calculons la densité de valeur moyenne de l'énergie correspondant à l'opérateur H, on voit que

$$\Phi^\star H \Phi$$

se représente par

$$\Phi^\star H \Phi = (\Phi^{(m)\star} + \Phi^{(0)\star}) H (\Phi^{(m)} + \Phi^{(0)}) = \Phi^{(m)\star} H \Phi^{(m)}.$$

La densité de valeur moyenne de l'énergie se réduit à la densité de valeur moyenne construite sur les $\Phi^{(m)}$. Par suite l'onde $\Phi^{(0)}$ correspond à une onde d'énergie nulle qu'écarte l'introduction de l'équation de condition (38 *b*).

Je remercie Monsieur le professeur Louis de Broglie pour la bienveillante attention qu'il a bien voulu accorder à ce travail.

Manuscrit reçu le 2 juillet 1939.